Analysis II

Jonathan Müller jo@student.ethz.ch

Tricks

Limes in 2 oder mehr Dimensionen:

$\binom{x}{y} = \binom{r \sin \phi}{r \cos \phi}$ und dann $r \to 0$

$\det(e^A) = e^{spur(A)}$ (Aus A II, Serie 3)

Definitionen

Stetigkeit: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst stetig im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$

Zusammenhängend: Eine Menge \$X \subset \mathbb{R}^n$ heisst zusammenhängend, wenn keine offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $X \subset U \cup V$ und $X \cap U \cap V = \emptyset$ existieren, ausser den trivialen, wo $X \subset U$ oder $X \subset V$ gilt.

Wegzusammenhängend: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst wegzusammenhängend, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ eine stetige Funktion $\gamma: [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert.

Satz: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $U \cup \mathbb{R}^m$ zusammenhängend. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ zusammenhängend.

Zwischenwertsatz: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $U \cup \mathbb{R}^m$ zusammenhängend. Dann gilt, dass für alle $c \in [f(x), f(y)], x, y \in U$ ein $z \in U$ mit $f(z) = c$ existiert.

Differentialrechnung

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen alle existieren. $f := (f_1, \dots, f_m)$ und $x := (x_1, \dots, x_n)$ Koordinaten im Urbildraum $\mathbb{R}^n$.

Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$: ($\vec{v}$ muss normiert werden!)

$$\partial_{\vec{v}} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix:

$$\mathrm{d}f = J_f = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Satz (von Schwarz): Sei $f(x, y)$ eine C^2-Funktion. Dann gilt: $f_{xy} = f_{yx}$

Hesse-Matrix:

$$H(f) = H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bsp.: $f(x, y) \Rightarrow H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Differenzierbarkeit: f differenzierbar, wenn:

- Alle Komponenten differenzierbar und die Abl. Stetig sind
- Summe/Produkt differenzierbarer Funktionen

Stetige Differenzierbarkeit: f heisst stetig differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$, wenn die Abbildung $\mathrm{d}f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig in x ist, also wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ stetig in x sind.

Satz (Vertauschen von ∂ und $\int$: Sei $f \in C^0: (x, y) \mapsto f(x, y)$. Ausserdem existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und sie sei stetig. Dann ist die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ stetig differenzierbar und $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$

Taylorpolynome (Punkt a, Grad ℓ):

$$T_a^\ell f(x) = -\sum_{|\alpha| \le \ell} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a)(x - a)^\alpha$$

Wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

Taylorpolynom zweiter Ordnung:

$$T_2(f(x), a) = f(a) + J_f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T H_f(a)(x - a)$$

Tangentialraum: $(x - a) \nabla f(a) = 0$

Tipps für Taylor: Einfach aus bekannten Funktionen summieren (log, sin, cos,…). Für Polynome: quadratisch ergänzen. Z.B. $x^3 + x^2 y + z^2$ um $(0,1,2) \Rightarrow x^3 + x^2(y - 1) + x^2 + (z - 2)^2 + 4(z - 2) + 4$, noch ordnen.

Extrema: Für kritische Punkte gilt $J_f = 0$

- $d^2 f(x)$ pos. def.: Minimum (Alle EW pos.)
- $d^2 f(x)$ neg. def.: Maximum (Alle EW neg.)
- Indefinit: Sattelpunkt

Tipp: eine symmetrische 2×2-Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre Spur und Determinante positiv sind (Aus A II, Serie 5).

Variationsrechnung

Vektorraum $\mathcal{F} :=$ $\{x: [0,1] \to \mathbb{R}^n | x \in C^2, x(0) = x_0, x(1) = x_1\}$

x_0, x_1 Randbedingungen

Gegeben: $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, L \in C^2$ (Lagrange-Funktion)
Gesucht: Funktion $x \in \mathcal{F}$
Funktional $S(x) := \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t)) dt$
(Funktional: Funktion einer Funktion)

Satz: Sei $x \in \mathcal{F}$ ein Extremum von $S \Rightarrow$ Die Eulergleichungen sind erfüllt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Satz: Sei $x \in \mathcal{F}$ eine Lösung der Eulergleichungen$\Rightarrow$ die Energie ist konstant.

$$E(t) = const. = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t))$$

Lagrange-Multiplikator

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soll unter Nebenbedingungen $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} = c$ maxi/minimiert werden (Gesucht: x_0)

$$\Rightarrow Löse \begin{cases} \nabla f(x_0) = -\lambda \nabla g(x_0) \\ g(x_0) = c \end{cases}$$

Implizite Funktionen

Def. Diffeomorphismus: $f: U \to V, U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, heisst C^k-Diffeomorphismus, falls f bijektiv und f sowie f^{-1} k-mal stetig differenzierbar sind.

Satz von der Umkehrabbildung: Sei $f \in C^1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ um x, sodass $f: U \to f(U)$ ein C^1-Diffeo.

Satz: $f \in C^1$ injektiv und $\mathrm{d}f(x)$ bijektiv $\forall x \in U \Rightarrow f$ ist C^1-Diffeo.

Satz von der Impliziten Funktion:

Sei $f \in C^k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, k \geq 1, f: (x, y) \to f(x, y)$. Wenn für (x_0, y_0)(Referenzlösung) $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$f(x_0, y_0) = 0$ und $\mathrm{d}_y f(x_0, y_0)$ bijektiv

$\Rightarrow \exists$ Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 bzw. y_0, sodass

$g(x_0) = y_0$ und $f(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = y \;\forall\, x \in U, y \in V$

Zudem gilt für die Abltg. $\mathrm{d}g(x) = -\left(\mathrm{d}_y f(x, g(x))\right)^{-1} \mathrm{d}_x f(x, g(x))$

Def. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst d-dim. C^k-Umfkt., falls $\forall\, p \in M \,\exists$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und ein C^k-Diffeo $\phi: U \to V, V \subset R^n$ offen, mit $\phi(M \cap U) \subset (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$

Die Diffeos heissen Karten und $M \cap U$ Kartengebiet. Hat man Karten $\phi_i: U_i \to V_i$, sodass jeder Punkt p im Definitionsgebiet einer Karte liegt, heisst $\{\phi_i\}_i$ ein Atlas von M. Die Inversen Abbildungen $\psi_i: \tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^d \to (M \cap U), \tilde{V}_i \times \{0\} = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V_i, \psi_i(x) = \phi_i^{-1}(x, 0)$ heissen Parametrisierungen.

Anschaulich bedeutet das, dass wir eine d-dimensionale Mfkt. in $\mathbb{R}^n$ so verformen können, dass sie eine d-dimensionale Ebene ist.

Satz (Mfkt. als Niveaumenge): Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umg. $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine Funktion $f \in C^k: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ existiert, so dass $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und $\mathrm{d}f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ surjektiv $\forall x \in U$.

Def. Regulärer Wert: Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^m$ heisst regulärer Wert von $f \in C^1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, falls $\mathrm{d}f(x)$ surjektiv (Rang = Anzahl Zeilen) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = f(y)^{-1}$.

Regulärwertsatz: Sei $f \in C^k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ und sei $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ ein regulärer Wert von $f \Rightarrow M = f^{-1}(\{y\})$ ist eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Zeige, dass *M* eine UMF: Definierende Glg. umformen, sodass auf einer Seite 0 steht $\to f(x) = 0$. Schreibe M als $M = f^{-1}(0)$ von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeige dass $\mathrm{d}f(x_0) \neq 0 \;\forall\, x_0 \in M \Rightarrow 0$ Reg. Wert $\Rightarrow M$ ist UMF.

Tangentialraum: $T_p M$ der UMF M um einen Punkt $p \in M$: $T_p M = kern(\mathrm{d}f(p))$

Mehrfache Integrale

Schwerpunkt: $S \coloneqq (s_1, \ldots, s_j)$,

$s_j \coloneqq \frac{1}{Vol_n(K)} \int_K x_j \, dx_1 \ldots dx_n$

Kugel in Zylinderkoordinaten:

$$\psi = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\,sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{2\pi} f(\ldots)\, r\, d\varphi\, dr\, dz$$

Kreisscheibe: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\ldots)\, r\, dr\, d\varphi$

Kugel in kartesischen Koordinaten:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(\ldots)\, dz\, dy\, dx$$

Kugelkoordinaten: $\psi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} f(\ldots)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Satz (Transformationsformel): Sei $\phi \in C^1: U \to \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\phi|_{A \setminus N}$ injektiv und $\mathrm{d}\phi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv $\forall x \in A \setminus N$ für N Jordan'sche Nullmenge und A kompakte, messbare Menge mit $N \subset A \subset U$. Dann ist $\phi(A) \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-Messbar, $f \circ \phi: A \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $f: \phi(A) \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbar ist und es gilt

$$\int_{\phi(a)} f(y)\mathrm{d}y = \int_A f(\phi(x)) |\det \mathrm{d}\phi(x)| \mathrm{d}x$$

Vektoranalysis

$$\boldsymbol{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\boldsymbol{div}\, \vec{f} = \nabla \cdot f = f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}$$

$$\boldsymbol{rot}\, \vec{f} = \nabla \times \mathrm{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$\vec{n} = f_x(x, y) \times f_y(x, y)$, **normieren**!

Gauss: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge mit stetig differenzierbarem Rand, $\vec{v}: \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ äusseres Normalenvektorfeld an $\partial\Omega$. Dann gilt $\forall\, f \in C^1: \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d\vec{O}(\vec{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{div}\, \vec{f}(\vec{x}) dV(\vec{x})$$

Der Durchfluss durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich dem Integral über die Divergenz im Inneren.

- **Wegelement**: $d\vec{x} = \vec{x}'(t)dt$
- **Oberflächenelement**: $\mathrm{d}\vec{O}(\varrho, \varphi) = (\vec{r_\varphi} \times \vec{r_\varrho})\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\varrho$
- **Volumenelement**: $\mathrm{d}V(\varrho, \vartheta, \varphi) = \det \mathrm{J}(\varrho, \vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varrho$

Satz von Stokes:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{\tau}(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{O}(\vec{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{rot}\, \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})\, \mathrm{dV}(\vec{x})$$

v Einheitsnormalenfeld

τ Tangenteneinheitsvektor der Randkurve