Komplexe Analysis Zusammenfassung

Jonathan Müller - jo@student.ethz.ch
Unter Verwendung der Theorieblätter von Alex Gross

4. Juli 2013

1 Rechnen mit komplexen Zahlen

- $\frac{1}{-i} = i$, $\frac{1}{i} = -i$
- $\boxed{z = x + iy = re^{i(\varphi+2k\pi)}}$
- $\boxed{z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))}$
- $\boxed{|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2}$ $\quad |zw| = |z||w|$
- $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $|e^z| = e^{Re(z)}$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$
- $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi+2k\pi}{n}}}$ $\quad z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$
- $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ $\quad \frac{1}{i} = -i$ $\quad \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ $\quad \Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\boxed{\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})}$ $\quad \boxed{\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})}$
- $\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})}$ $\quad \boxed{\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})}$
- $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ $\quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
- Umrechnung kartesisch $\Rightarrow$ polar:
  $r = |z|, \varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{für} \quad y \geq 0 \\ \arccos(\frac{x}{r}) & \text{für} \quad y < 0 \end{cases}$
- Lösung von $t^4 + a^4 = 0$ für $a \neq 0$:
  $z_1 = |a|e^{i\pi/4} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}(1 + i)$
  $z_2 = |a|e^{3i\pi/4} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}(-1 + i)$
  $z_3 = |a|e^{5i\pi/4} = -z_1 = \overline{z}_2$
  $z_4 = |a|e^{7i\pi/4} = -z_2 = \overline{z}_1$
- Wichtige Winkel und ihre Werte:

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(\varphi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\varphi)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2 Logarithmus etc.

- $log(z) = \ln(|z|) + i \cdot arg(z)$ $\quad arg(z) \in \mathbb{R}$
- $Log(z) = \ln(|z|) + i \cdot Arg(z)$ $\quad Arg(z) \in [-\pi, \pi[$
- $a^z = \{w = e^{z \cdot u} : u \in log(a)\}$
- p.v. $a^z = e^{zLog(a)}$ $\quad e^{Log(a)} = a$
- $\boxed{\sinh(z) = -i\sin(iz)}$ $\boxed{\cosh(z) = \cos(iz)}$
- $\boxed{\sin(z) = i\sinh(-iz)}$ $\boxed{\cos(z) = \cosh(iz)}$

3 Cauchy Riemannsche Differentialgleichungen

- Komplexe Funktionen: $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), u = Re(f(z)), v = Im(f(z))$
- $f(z)$ analytisch $\Leftrightarrow$ holomorph $\Leftrightarrow$ $\boxed{u_x = v_y \;\&\; u_y = -v_x}$
- eine Funktion heisst "ganz", falls sie in der gesamten komplexen Ebene definiert und analytisch ist
- $u(x, y)$ harmonisch $\Leftrightarrow$ $\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0}$ $\quad f(z)$ holomorph $\Rightarrow$ u und v harmonisch
- $\mathbb{C}^{-*} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi < Arg(z) < \pi\}$ ($\mathbb{C}$ ohne 0 und negative reelle Achse)
- $\cosh(x)' = \sinh(x), \sinh(x)' = \cosh(x), \arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}, \arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$ $\quad \cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

4 Integralformel und Integralsatz von Cauchy

- Integralformel von Cauchy: $\boxed{2\pi i \cdot f(a) \cdot n(\gamma, a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}}$
  $n(\gamma, a) = \#$Umläufe von γ um a, im Gegenuhrzeigersinn positiv!
- Ω (von γ umschlossen) einfach zsh. und f auf Ω analytisch $\Rightarrow$ besitzt Stammfunktion und $\oint_\gamma f(z) = 0$
- Abgeleitet : $\boxed{2\pi i \cdot f^{(n)}(a) \cdot n(\gamma, a) = n! \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}}$
- Integralsatz von Cauchy: Wenn $f(z)$ holomorph, γ eine geschlossene Kurve, und das Gebiet Ω innerhalb von γ einfach zusammenhängend ist (f besitzt also Stammfunktion!), gilt:
  $\boxed{\oint_\gamma f(z) = 0}$ und $\boxed{\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(z)}$ (γ_1 und γ_2 gleiche Start- und Endpunkte)
- Linienintegrale: $\boxed{\int_\gamma f(z) = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt}$ $\gamma(a) =$ Startpunkt, $\gamma(b) =$ Endpunkt
- Parametrisierungen:
  - Strecke von z_1 zu z_2: $\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t, \quad t \in [0, 1]$
  - Kreis um z_0 mit Radius r: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

5 Integralformel & Maximumprinzip

- Mittelwertseigenschaft: Wenn $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch: $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})d\varphi$
  "Mittelwert der Funktion über den Kreisrand = Funktionswert im Kreismittelpunkt"
- Maximumprinzip: Wenn $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, und $\exists z_0 \in \Omega$, so dass $|f(z_0)| = \min(|f(z)|)$ oder $|f(z_0)| = \max(|f(z)|)$, dann ist $f(z)$ konstant. "f(z) nimmt keine Extremalwerte in einem analytischen Gebiet an, ausser wenn f(z) konstant ist".
- Liouville: Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, und $|f(z)| \leq M \ \forall z \Rightarrow f(z) =$ konst.
  "Wenn f(z) ganz ist, ist f(z) sicher nicht beschränkt (ganz: auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch/holomorph)"

6 Potenzreihen & Taylorreihen

- Falls konvergiert $\Rightarrow$ Potenzreihe stellt holomorphe Funktion dar
- $\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k} = \boxed{\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k}}$ $\forall z \in B(z_0, \rho)$ (Taylorreihe, f analytisch)
  $\boxed{f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) \cdot a_k (z - z_0)^{k-n}}$ $\Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!$
- Potenzreihen konvergieren auf Kreisscheiben mit (Konvergenz)radius ρ:
  Quotientenkriterium: $\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}}$ Wurzelkriterium: $\boxed{\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}}}$
  Auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe verhalten sich Potenzreihen unterschiedlich.

- Geometrische Reihe: $\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (z)^k}$ mit $|z| < 1$, $\boxed{\frac{1}{1-\frac{z}{c}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{c})^k}$ mit $|z| < c$
- Ableitungen: $\frac{1}{(z-1)^2} = \sum k \cdot z^{k-1}$, $\frac{-2}{(z-1)^3} = \sum (k^2 - k)) \cdot z^{k-2}$
- Wichtige Potenzreihen um $z_0 = 0$: $\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$ $\boxed{\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}}$
- $\boxed{\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}}$, und um $z_0 \neq 0$: $\boxed{\log(z) = \log(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-z_0)^k}{k \cdot z_0^k}}$

7 Potenzreihen-Tricks

- Zuerst immer PBZ machen, Umformen, geom. Reihe und ihre Ableitungen einsetzen
- $\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$, $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$
- $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}$
- Umwandlung für Konvergenz ausserhalb einer Kreisscheibe: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit $|z-z_0| < \sigma \Leftrightarrow -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$ mit $|z-z_0| > \sigma$ ("Wie in Übung besprochen")
- Umformen für geometrische Reihe um z_0: $\frac{1}{z+a} = \frac{1}{(a+z_0)+(z-z_0)} = \frac{1}{a+z_0} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-z_0}{a+z_0})} = \frac{1}{a+z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{z-z_0}{a+z_0})^k$
- Konvergenzradius: $|\frac{z-z_0}{a+z_0}| < 1$
- ACHTUNG: Laurentreihe geht nur, wenn keine Singularitäten drin!

8 Laurent-Reihen & Singularitäten

- $f(z)$ analytisch auf einem Kreisring $a < |z-z_0| < b \Rightarrow$ $\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}$
- Koeffizienten der Laurentreihe:
  $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{dB(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$
  Hauptteil: $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$
- Laurentreihen sind Gebiets(Kreisrings-)abhängig!
- isolierte Singularitäten in z_0:
  1. hebbar: Hauptteil der Laurentreihe *um* z_0 ist null.
     $\Rightarrow$ f ist analytisch fortsetzbar in z_0. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert, und Hauptteil der Laurentreihe = 0.
  2. Pole: Hauptteil ist endlich lang
     $\Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lambda \neq \pm\infty$
     $\Leftrightarrow m \geq$ Ordnung des Pols.
     Ordnung des Pols ist gleich der $tiefsten$ Ordnung des Hauptteils.
  3. wesentliche Singularitäten: Hauptteil unendlich lang, Funktion "chaotisch"nahe z_0. (Betrachte immer den Hauptteil der *innersten* Laurentreihe *um* z_0!)
- nicht isolierte Singularitäten haben keinen Typ. Beispiel: $z_0 = 0$ bei $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$.
- Falls $f(z)$ eine gerade Funktion ist, enthält die Laurentreihe *um* 0 nur gerade Exponenten $\Rightarrow$ Residuum = 0 (Achtung, nur bei Reihen um 0!)

- Falls $f(z)$ eine ungerade Funktion ist, enthält die Laurentreihe *um* 0 nur ungerade Exponenten.
- $f(z)$ eine Funktion der Form $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, wobei g eine überall analytische Funktion ist, so sind die isolierten Singularitäten von f genau die Nullstellen von g. Diese sind stets Polstellen, und die Ordnungen dieser Polstellen von f sind genau die Ordnungen der Nullstellen von g (Serie 7, Aufgabe 1).

9 Residuen & Residuensatz

- Residuensatz: $\boxed{\oint_{d\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \Omega} res(f|z_i) \cdot n(\gamma(t), z_i)}$
- Nachtrag Residuensatz: $\boxed{\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z-z_0|=\epsilon, \Im(z)>0} f(z)dz = \pi i res(f|z_0)}$, mit analytischem $f(z)$
- Residuenberechnung (3,4,5 am Wichtigsten!):
  1. $res(f|z_0) =$ Koeff. von z^{-1} der innersten Laurentreihe um z_0. ($=a_{-1}$)
  2. $res(f|z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{dB(z_0,r)} f(z)dz$
  3. $res(f|z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$, Falls z_0 ein Pol erster Ordnung ist.
  4. $res(f|z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} (\frac{d}{dz})^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]$, Falls z_0 ein Pol m-ter Ordnung ist.
  5. $res(f|z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$, Falls $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ (Analytische Funktionen) und $q(z)$ in z_0 eine einfache NS hat.
- **Polstellen und Residuen nicht verwechseln!**
- HowTo: Berechne $\oint_\Gamma f(z)dz$:
  1. Bestimme die Singularitäten (und deren Typ) von f(z). Faktorisiere den Nenner!
  2. Welche z_i sind innerhalb von Γ? Berechne Residuen davon!
  3. Residuensatz $\rightarrow$ Fertig.
- $sin(z) = 0$ für $z = n \cdot \pi$, $cos(z) = 0$ für $z = \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2}$

10 Residuen

Berechnung von uneigentlichen Integralen mithilfe des Residuensatzes:

1. $\int_0^{2\pi} f(\cos(\phi), \sin(\phi)) d\phi = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}) dz = 2\pi \sum_{z_i \in dB(0,1)} res(\frac{1}{z} f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})|z_i)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z \in H^+} res(f|z_i) + \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} res(f|z_i) & \text{falls} \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \\ -2\pi i \sum_{z \in H^-} res(f|z_i) - \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} res(f|z_i) & \text{und} \quad \deg(p) \leq \deg(q) - 2 \end{cases}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z \in H^+} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i) & a \geq 0 & \text{falls} \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ und } q(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{R} \\ -2\pi i \sum_{z \in H^-} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i) & a \leq 0 & \text{und} \quad \deg(p) \leq \deg(q) - 2 \end{cases}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \begin{cases} -2\pi \cdot \text{Im}(\sum_{z \in H^+} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i)) & a \geq 0 & \text{(gleiche Bedingungen} \\ 2\pi \cdot \text{Im}(\sum_{z \in H^-} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i)) & a \leq 0 & \text{wie bei 3.)} \end{cases}$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \begin{cases} 2\pi \cdot \text{Re}(\sum_{z \in H^+} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i)) & a \geq 0 & \text{(gleiche Bedingungen} \\ -2\pi \cdot \text{Re}(\sum_{z \in H^-} res(f(z) e^{i\alpha z}|z_i)) & a \leq 0 & \text{wie bei 3.)} \end{cases}$

Dabei ist mit H^+ die obere Halbebene, und mit H^- die untere Halbebene gemeint

11 Fourier

- falls $f(t)$ T-periodisch ($\Leftrightarrow f(t) = f(t+T)$) ist, lässt sich $f(t)$ in eine Fourierreihe umwandeln:

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) + b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t)}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}dt} \quad \boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)dt} \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt}$$

- Dabei ist T_0 beliebig (meistens $= 0$) und T die Fundamentalperiode (=kleinstmögliche Periode)
- $\frac{a_0}{2}$ ist das arithmetische Mittel von f(t).
- falls $f(t)$ gerade ist (d.h. $f(t) = f(-t)$) gilt: $b_k = 0$ bzw $c_k = c_{-k}$ $\forall k$
- falls $f(t)$ ungerade ist (d.h. $f(t) = -f(-t)$) gilt: $a_k = 0$ bzw $c_k = -c_{-k}$ $\forall k$

Abschätzung von Integralen entlang von Halbkreisen mit unendlichem Radius:

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}(|\int_{S_R^+} f(z)dz|) \leq \lim_{R\to\infty} \pi R \max(|f(z)|)}$$

12 Residuen, Fourier und Laplace

- Fundamentalintegrale: $\boxed{\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 0 \quad \text{für} \quad k \neq 0, k \in \mathbb{Z}}$, $\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(kt)dt = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}}$

  $\boxed{\int_{|z|=r} z^k dz = 0 \quad \text{für} \quad k \neq -1, k \in \mathbb{Z}}$, $\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(kt)dt = 0 \quad \text{für} \quad k \neq 0, k \in \mathbb{Z}}$

- Fourierkoeffizienten bei geraden/ungeraden Funktionen:

  $\boxed{f(t) = f(-t) \Rightarrow b_k = 0, a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)}$, $\boxed{f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_k = 0, b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)}$

- Umwandlung von Fourierkoeffizienten ineinander:

$$\boxed{c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \quad || \quad a_0 = 2c_0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \quad || \quad a_k = c_k + c_{-k} \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \quad || \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}}$$

- Satz von Parseval: $\boxed{||f||_2 = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$

- Skalarprodukt: 1.) f, g 2π-periodisch: $\boxed{\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt}$ 2.) sonst: $\boxed{\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt}$

- Faltung: f, g 2π-periodisch: $\boxed{(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t-\tau)d\tau}$ sonst: $\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau}$

- Fouriertransformation: $\boxed{\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt}$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

  Rücktransformation: $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{i\omega t}dw}$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|dw < \infty$

- Laplacetransformation: $\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$ bzw. $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds}$

  dabei ist $s = \sigma + i\omega$, wobei σ so gewählt werden muss, dass die Integrale konvergieren (weiteres in SigSys)

- Allgemeine Identitäten (Bei Fourier ist $\sigma = 0$):

$\boxed{(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)G(s)}$ $\boxed{f(at) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})}$ $\boxed{f(t)e^{at} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(s-a)}$

$\boxed{f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^+)}$ $\boxed{f^{(n)}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)}$

- $y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s)$
- $\dot{y}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad sY(s) - y(0)$
- $\ddot{y}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
- $\dddot{y}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)$

Immer ausführlich alles hinschreiben, z.B. Residuensatz!!

Laplacetransformation

Angegeben sind die Grenzen des Konvergenzgebietes, wobei $s = \sigma + j\omega$ definiert ist. Die Grenzen können durchaus auch $\pm\infty$ sein. Wenn durch "mindestens" gekennzeichnet, kann der Konvergenzbereich in Einzelfällen auch größer als angegeben werden (zum Beispiel durch Auslöschung von Polstellen).

Zeitfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	$\mathcal{R}_x = \{s \mid R_{x-} < \sigma < R_{x+}\}$
$y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$Y(s)$	$\mathcal{R}_y = \{s \mid R_{y-} < \sigma < R_{y+}\}$
$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(s) + bY(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$x(t - T_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sT_0}X(s)$	$\mathcal{R}_x$
$e^{s_0 t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s - s_0)$	$\{s \mid R_{x-} < \sigma - \mathfrak{Re}\{s_0\} < R_{x+}\}$
$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(s^*)$	$\mathcal{R}_x$
$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\left\{s \mid R_{x-} < \mathfrak{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} < R_{x+}\right\}$
$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s)Y(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sX(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x$
$-tx(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\mathcal{R}_x$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}X(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \{s \mid \sigma > 0\}$

Einseitige Laplacetransformation

Für Signale, die für $t < 0$ identisch 0 sind, ist die einseitige Laplacetransformation identisch mit der gewöhnlichen (zweiseitigen) Laplacetransformation.

Merke: Konvergenzgebiet der einseitigen Laplacetransformation ist immer eine *rechte* Halbebene.

Obige Eigenschaften gelten weiter, bis auf folgende Ausnahmen:

Zeitfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	$\mathcal{R}_x = \{s \mid \sigma > R_{x-}\}$
$y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathcal{Y}(s)$	$\mathcal{R}_y = \{s \mid \sigma > R_{y-}\}$
$x(at), \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\left\{s \mid \mathfrak{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} > R_{x-}\right\}$
$(x * y)(t)^\dagger$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$	mindestens $\mathcal{R}_x$
$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \{s \mid \sigma > 0\}$

†Nur unter der Voraussetzung, daß $y(t) = 0$ und $x(t) = 0$ für $t < 0$

Einige Laplacetransformationspaare

Zeitfunktion	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	alle s
$\sigma(t)^\dagger$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\sigma(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$
$e^{-\alpha t}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t}\sigma(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\sigma > -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\sigma < -\alpha$
$(\cos\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$(\sin\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$(e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -\alpha$
$(e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -\alpha$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	s^n	alle s
$\underbrace{\sigma(t) * \cdots * \sigma(t)}_{n \text{ mal}}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$

†Mit $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ wird die Sprungfunktion bezeichnet, nicht zu verwechseln mit $\sigma = \mathfrak{Re}\{s\}$.

2 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$
$x(t-T_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-j\omega T_0} X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega-\omega_0))$
$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
$(x*y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}(X*Y)(j\omega)$
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t)+x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{X(j\omega)\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t)-x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\mathfrak{Im}\{X(j\omega)\}$
$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_e(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega)+X^*(-j\omega))$
$j\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_o(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega)-X^*(-j\omega))$
$tx(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Einige Fouriertransformationspaare

$\delta(t-T_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-j\omega T_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\}>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\}>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$

Einige Fouriertransformationspaare (Fortsetzung)

$e^{-a\|t\|}, \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin \omega_c t}{\pi t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| \leq \omega_c \\ 0, & \|\omega\| > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \|t\| \leq T_1 \\ 0 & \|t\| > T_1 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\,\dfrac{\sin \omega T_1}{\omega}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\|t\|}{T_1} & \|t\| \leq T_1 \\ 0 & \|t\| > T_1 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$4\,\dfrac{\sin^2 \frac{\omega T_1}{2}}{T_1 \omega^2}$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(j\omega)^n$
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi j^n \dfrac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$
$\|t\|$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\dfrac{2}{\omega^2}$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega)$$

$$X(jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi x(-\omega)$$

$$\tfrac{1}{2\pi} X(-jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(\omega)$$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$