Physik I

Jonathan Müller jo@student.ethz.ch

Zylinderkoordinaten:

$$s = \begin{pmatrix} r e_r \\ \varphi e_\varphi \\ z e_z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \dot r e_r \\ r\dot\varphi e_\varphi \\ \dot z e_z\end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} (\ddot r - r\dot\varphi^2)e_r \\ (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)e_\varphi \\ \ddot z e_z\end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten-Kartesisch:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r\\ \varphi \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z\end{pmatrix}$$

Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad A = 4\pi r^2$

Kreiszylinder: $V = \pi r^2 h$

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Mechanik

$$f = a\cdot m \quad a = \frac{F}{m}$$

$$\ddot x = a$$

$$\dot x = v = a\cdot t + v_0 = \sqrt{2ax + v_0^2}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot a\cdot t^2 + v_0\cdot t + x_0$$

$$= \int_0^t (v_0+at)dt$$

$$= \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Schiefer Wurf: $v_{0x} = v_0\cos\varphi$

$v_{0y} = v_0 \sin\varphi$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y(x) = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

$$= (v_0\tan\varphi)x - \frac{g}{2(v_0\cos\varphi)}$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = mgh$$

$$F = -\frac{d}{dz}E_{pot} = -\frac{d}{dz}V(x)$$

$$m\ddot x = -\nabla E_{pot}$$

In grav. Feld: $= -\frac{GMm}{R}$

Gravitationskraft: $F_G = G\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Fluchtgeschwindigkeit: $v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Arbeit: $W = \int_a^b F\,dx$

Energieerhaltung: $E_{tot} = E_{pot} + E_{kin}$

$$= maz + \frac{1}{2}m\dot z^2 d$$

$$\frac{d}{dt}\left(maz + \frac{1}{2}m\dot z^2\right) = 0$$

- $E_{trans} = \frac{1}{2}mv^2$
- $E_{rot} = \frac{1}{2}I\dot\varphi$

Harmonische Schwingung: $E_{pot} = az$

Impuls: $p = m\dot x$

Kraftstoss: $\Delta p = p_E - p_A$

Elastischer Stoss:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2,i}$$

$$v_{2,f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}v_{2,i} + \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1,i}$$

Leistung: $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_Q$ für Kraft $\boldsymbol{F}$ an Punkt $\boldsymbol{Q}$ mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_q$

Rotation

Kreisbewegung: $v = \omega r = 2\pi f r = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Zentripetalbeschleunigung: $\vec a = \vec\omega \times \vec v$

$$\vec a_z = \frac{v^2}{r} = \omega^2\cdot r, \quad F_z = \omega^2\cdot r\cdot m$$

Drehimpuls: $L = x \times p(mr)^2\omega = mr^2\dot\varphi = \mathrm{I}\omega$

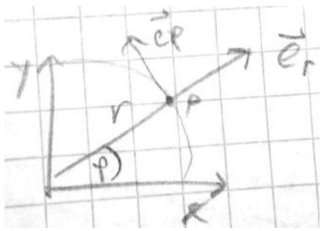
Trägheitsmoment:

$$\mathrm{I} = \sum m_i r_i^2 = \frac{L}{\omega} = \rho\int r^2\,dV$$

Drehmoment: $M = \ddot\varphi r m = F\times r = \ddot\varphi\mathrm{I}$

Auf stationärer Bahn:

$$F = m\dot\varphi^2 r = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{GMm}{r^2}$$



Kreisbewegung in Polarkoordinaten:

$$\vec a = \underbrace{-r\dot\varphi^2\vec e_r}_{Pos.radial} + \underbrace{r\ddot\varphi\vec e_\varphi}_{tangential} = \dot{\vec v}$$

Kepler'sches Gesetz: $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

Moment bezüglich $\boldsymbol{O}$: $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

Leistung für reine Rotation: $P = \boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$

Schwingungen

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot x = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Freie, harmonische Schwingung:

$F(\vec r) = -\nabla U_{pot}(\vec r)$

Arbeit: $W = \int_a^b F(x)dx = \Delta U_{pot}$

⇒Harmonische Approximation:

$U(x) = U(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\underbrace{U''(x_0)}_{Federkonst.}$ um x_0

⇒ Bewegungsleichung: $mx = -\frac{dU}{dx} = -(x-x_0)U''(x_0)$

Durch Sub. von $y := x - x_0$: $y + \omega_0^2 y = 0$

$$y(t) = \underbrace{A}_{Amplitude}\cos\left(\underbrace{\omega_0}_{Eigenfreq.}\cdot t + \varphi\right)$$

Periodendauer :$T = 2\pi/\omega_0$

Erzwungene Schwingung: $y + \omega_0^2 = \frac{1}{m}F(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}$

Gedämpfte Schwingung: $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow m\ddot y = -ky - \frac{m}{\tau}\dot y$

$$\Rightarrow \omega_{neu} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}}$$

Federschwinger: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

Pendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Phys. Pendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ d: Distanz zur Achse

Wellen

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{T}$$

Harmonische: $y(x,t) = A\cos(qx - \omega t)$
$q = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellentäler pro Längeneinheit

$$\omega = c \cdot q = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Stehende: $y(x,t) = A\cos(qx - \omega t) + B\cos(qx + \omega t) \Rightarrow$ Überlagerung einer einfallenden und reflektierten harmonischen Welle.
Randbedingungen:

- Bauch: $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t) = 0\ \forall t$
- Knoten: $y(x_0, t) = 0\ \forall t$

$$\sin(x) = 0: x = n \cdot \pi$$
$$\cos(x) = 0: \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$$

Interferenz: r_1, r_2: Position
Konstruktiv: $r_1 - r_2 = n\lambda,\ \ n \in \mathbb{Z}$
Destruktiv: $r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2},\ \ n \in \mathbb{Z}$

Elektrizität

E-Feld:

$$\int E(r)\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Potentielle Energie eines Dipols:

$$E_{pot} = q_1\Phi(\vec{r}_0) + q_2\Phi(\vec{r}_0 + \vec{d})$$

Bewegung des gebundenen Elektrons unter dem Einfluss eines oszillierenden E-Felds:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = q_e E(t)$$

Die homogene Lsg. Ist uninteressant da $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ mit φ zufällig

Dipolmoment:

$$p(t) = qd = qx(t) = \alpha\varepsilon_0 E(t)$$

Differentialgleichungen

Gleichung	Ansatz
$\ddot{x} = 0$	$x(t) = A * t + B$
$\ddot{x} + \omega * x = 0$	$x(t) = A * \cos(\sqrt{\omega} * t) + B * \sin(\sqrt{\omega} * t)$
$\ddot{x} + \omega * x = k$	$x(t) = A * \cos(\sqrt{\omega} * t) + B * \sin(\sqrt{\omega} * t) + \frac{k}{\omega}$
$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$	$x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$

Achtung: m bei $m\ddot{x}(t)$ wegdividieren!

Linearisieren: $\sin\varphi = \varphi$ $\cos\varphi = 1$ für kleine φ

Transformation (Bsp.):

$$q_1 = x_1 + x_2$$
$$q_2 = x_2 - x_2$$
$$\text{und } x_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}, x_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Lineare DGL mit konst. Koeffizienten:

$$y^{(n)} + a_{n\_1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = K(t)$$

Zugehörige homogene DGL: falls $K(t) = 0$

Lösung besteht aus Gesamtlösung und partikulärer Lösung: $y = y_G + y_P$

Homogene DGL n-ter Ordnung mit Ansatz $e^{\lambda t}$ lösen

1. Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ $y' = \lambda e^{\lambda t}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ...
2. $chp(\lambda)$ bilden: In der DGL jede k-te Abl. Von y ersetzen durch λ^k mit $y = \lambda^0 = 1$
3. Nullstellen bestimmen
4. In Ansatz einsetzen
   a. Einfache Nullstelle: $y_i = e^{\lambda_i t}$
   b. n-fache Nullstelle: $y_{i+k} = t^k e^{\lambda t}$ $k = 0, 1, \dots, m-1$
   c. $\lambda_i = 0$: $y_i = 1$
   d. $\lambda_i = 0$ m-fach: $y_{i+k} = x^k$ $k = 0, 1, \dots, m$
   e. $\lambda = \alpha \pm \beta i$: $y_{i,i+1} = e^{\lambda x}\sin(\beta x),\ \ e^{\lambda x}\cos(\beta x)$
5. Linearkombination der Lsg. bilden: $y_H = \sum_{i=0}^{n} c_i y_i$

Spezielle Lösungen für $K(t)$

$sp\ L$ =Lösung der homogenen Gleichung

$K(t)$	Spektral-bedingung	Ansatz für $y_P(t)$
t^r	$0 \notin sp\ L$	$A + Bt + \dots + Z_r t^r$
	$0 \in sp\ L, m$-fach	$At^m + Bt^{m+1} + \dots + Z_r t^{m+r}$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r$ $b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin sp\ L$	$A + Bt + \dots + Z_r t^r$
$c \cdot e^{\lambda_0 t}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin sp\ L$	$Ae^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in sp\ L, m$-fach	$x^m \cdot A \cdot e^{\lambda_0 t}$
$\cos\omega t$, $\sin\omega t$	$\pm i\omega \notin sp\ L$	$A\cos\omega t + B\sin\omega t$
	$\pm i\omega \in sp\ L$, einfach	$t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin sp\ L$	$(A + Bt + Ct^2)e^{-t}$

Ansatz ableiten, dann die $y_P, y_P', y_P'', \dots$ einsetzen in die ursprüngliche DGL ($y_P als\ y$), durch Vergleich Koeffizienten finden.

Superpositionsprinzip: $K(t) = K_1(t) + K_2(t), K_i(t)$ dürfen einzeln gelöst werden

Spezielle DGL

$\boldsymbol{y' = g(t)y}$: G suchen dass $G' = g \Rightarrow y = c \cdot e^{G(t)}, c \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{y' = g(t)h(y)}$:

1. $G(t)$ suchen sodass $G(t)' = g(t)$
2. $H(t)$ suchen sodass $H(y) = \frac{1}{h(y)}$
3. $H(y) = G(y)$ nach n auflösen $\Rightarrow$Lösung

Spezialfall DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten (Schwingung)

$$y'' + 2ky' + \omega_0^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - w_0^2}$$

- $k > \omega_0$: $y_G = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
- $k = \omega_0$: $y_H = (A + Bx)e^{-kt}$
- $k < \omega_0$: ,
  - $\lambda_{1,2} = -l \pm i\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
  - $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
  - $y_H = (A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t)e^{-kt}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$

Tabellen

Körper	Ort	E	C
Vollkugel	innen	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r$	
Vollkugel	aussen	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$	$C = 4\pi\varepsilon_0 r$
Kugelschicht	innen	E=0	$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_A R_I}{R_A - R_I}$
Kugelschicht	innen	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$	$C = 4\pi\varepsilon_0 r$
2 Kugeln	dazwischen		$C = 2\pi\varepsilon_0 r(1 + \frac{r(a^2-r^2)}{a(a^2-ar-r^2)})$
Stab	aussen	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r*l}$	$C = \pi\varepsilon_0\frac{l}{ln(\frac{d}{r})}$
Zylinder	innen	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2 l}r$	$C = 2\pi\varepsilon_0\frac{l}{ln(\frac{R_A}{R_I})}$
Platte	beide Seiten	$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{A_\perp}$	
2 Platten	dazwischen	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A_\perp}$	$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$
dicke Platte	x von der Mitte	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho x$ (Raumladungsd.)	
Leiter	Oberfläche	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A_\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$	

Körper	magn. Feldstärke H	
geradliniger Leiter	$H = \frac{I}{2\pi r}$	r: Abstand zur Messung
lange Spule	$H = \frac{NI}{l}$	H im Innern der Spule
Ringspule	$H = \frac{NI}{2\pi R}$	R ist der grosse Radius ($d/2 \ll R$)

Selbstinduktivitäten

Spule:	$L = \mu_0\mu_r N^2 A l$	N : Anzahl Windungen pro Länge
gerade Einfachleitung:	$L = \frac{\mu_0\mu_r l}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - \frac{3}{4}\right)$	
Doppelleitung:	$L = \frac{\mu_0\mu_r l}{\pi}\left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{4}\right)$	a : Abstand der Leiter
Ringspule:	$L = \mu_0\mu_r\frac{5N^2}{2\pi R}$	
Koaxialleitung:	$L^* = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$	

Maxwell

1. Maxwellsches Gesetz $\quad rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \oint H ds = \int (j + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) dA$

Ampere-Gesetz, Durchflutungsgesetz: $\triangle E \rightarrow H$

2. Maxwellsches Gesetz $\quad rot(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad \oint E ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} d\vec{A}$

Induktionsgesetz v. Faraday: $\triangle H \rightarrow E$

3. Maxwellsches Gesetz $\quad div(\vec{D}) = \rho_{el} \quad \oint \vec{D} d\vec{A} = Q$

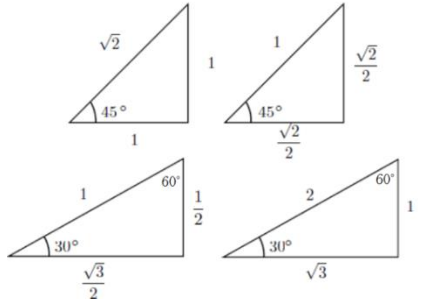
Grundgesetz d. E-Statik: $Q \rightarrow E$

4. Maxwellsches Gesetz $\quad div(\vec{B}) = 0 \quad \oint \vec{B} d\vec{A} = 0$

Grundgesetz des Magnetismus: H=quellenfrei

Diverses

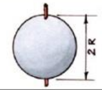
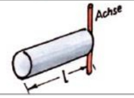
	0	30 $\frac{\pi}{6}$	45 $\frac{\pi}{4}$	60 $\frac{\pi}{3}$	90 $\frac{\pi}{2}$	180 π	270 $\frac{3\pi}{2}$	360 2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$undef$	0	$undef$	0



Winkelsumme n-Eck: $(n-2) * 180°$

Gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\left|\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1$$

Objekt	Drehmasse
	$I = {}^2/_5\, mR^2$
	$I = {}^1/_2\, mR^2$ Bsp.: r = 0,01 m, m = 1 kg $I = 5 \cdot 10^{-5}$ kgm²
	$I = {}^1/_{12}\, ml^2$ Bsp.: l = 0,77 m, m = 1 kg $I = 5 \cdot 10^{-2}$ kgm²
	$I = {}^1/_3\, ml^2$

Hohlzylinder: $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2) \qquad r_1 < r_2$

Kugelschale: $I = \frac{2}{3}mr^2 \qquad$ Wandstärke $d \ll r$

Zylindermantel: $I = mr^2 \qquad$ Wandstärke $d \ll r$

Hohlzylinder: $I = m\frac{r_1^2 + 2_2^2}{2}$

Tipps

Zeige dass Energie erhalten: $\frac{dE}{dt} = 0$

Finde Kreisbahn: $\dot{r}_{adius} = 0$ und E_{tot} minimal