# Grundsätzliches

**Schnelligkeit**: $v = |\boldsymbol{v}|$ (Betrag der Geschw.)

**Satz der Projizierten Geschwindigkeiten bei Starrkörpern**: $v'_P = v'_Q$

**Zylinderkoordinaten**

$\rho$:Radius auf xy-Ebene, $\varphi$:Winkel auf xy-Ebene

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e_\rho} + \boldsymbol{e_z}$ | Bahn |
| $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\boldsymbol{e_\rho} + \rho\dot{\boldsymbol{e_\rho}} + \dot{z}\boldsymbol{e_z}$ | Geschw. |
| $s = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$ | Betrag |
| $\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e_\varphi} + \ddot{z}\boldsymbol{e_z}$ | Beschl. |

**Ebene Polarkoordinaten**

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r}$ | Bahn |
| $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e_\varphi}$ | Geschw. |
| $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e_\varphi}$ | Beschl. |

Umrechnen

$$\boldsymbol{e_\rho} = \cos(\varphi)\,\boldsymbol{e_x} + \sin(\varphi)\,\boldsymbol{e_y}$$
$$\boldsymbol{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\,\boldsymbol{e_x} + \cos(\varphi)\,\boldsymbol{e_y}$$
$$\boldsymbol{e_x} = \cos(\varphi)\,\boldsymbol{e_\rho} + \sin(\varphi)\,\boldsymbol{e_\varphi}$$
$$\boldsymbol{e_y} = \sin(\varphi)\,\boldsymbol{e_\rho} + \cos(\varphi)\,\boldsymbol{e_\varphi}$$

# Freiheitsgrad

Ein Punkt in $\mathbb{R}^3$ hat den Freiheitsgrad 3.
**Allgemein**: $f = n - b$
$f$ Freiheitsgrad, $n$ Summe der Freiheitsgrade der Bindungskörper, $b$ Anzahl unabh. Verbindgsgl.

**Satz**: Ein starrer Körper hat den Freiheitsgrad 6.

# Ebene Bewegung

- Alle Geschwindigkeiten sind zu einer Ebene E parallel
- Alle Punkte auf einer Normalen zu E haben die gleiche Geschwindigkeit

Eine Starre, ebene Bewegung ist momentan **entweder** eine Translation **oder** eine Rotation.

**Satz vom Momentanzentrum**: $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P$ für Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_P$, Radius $\boldsymbol{r}_P$

**Momentanzentrum finden**: Alle $\boldsymbol{v}$ sind rechtwinklig dazu → SdpG verwenden!

# Räumliche Bewegungen

Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation.
$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P$

Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes eines Starrkörpers ist bestimmt durch die Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ eines Punktes B und die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.
$\{\boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{\omega}\}$ heisst **Kinemate**.

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$$

**Invarianten:**

- $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{\omega}$
- $I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_B$
- Translation, falls $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$
- Rotation, falls $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_B = I_2 = 0$
- Schraubung, falls $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_B = I_2 \neq 0$

Moment bezüglich $\boldsymbol{O}$: $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ [Newton-Meter]. Ist vom Bezugspunkt abhängig! Kräfte können entlang der Wirkungslinie verschoben werden!

# Leistung

$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_Q$ für Kraft $\boldsymbol{F}$ an Punkt $\boldsymbol{Q}$ mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_q$

Leistung für reine Rotation: $P = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$

# Statik

## KB/MB schreiben!

Resultierende $\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i$

Gesamtleistung $\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$

Leistung einer Kräftegruppe bei einer Starrkörperbewegung (mit Kinemate, Resultierender und resultierendem Moment):
$P = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{M}_B \cdot \omega$

**Transformationsregel** für Moment:

$$\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{PO} \times \boldsymbol{R}$$

$\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M_O}\}$ heisst Dyname.

Invarianten:

- $\boldsymbol{I_1} = \boldsymbol{R}$
- $I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M_O}$

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu

- Nullsystem, falls $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{0}$
- Moment, falls $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{M_O} \neq \boldsymbol{0}$
- Einzelkraft, falls $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$ und $I_2 = 0$
- Schraube, falls $I_2 \neq 0$

**Statisch bestimmt**: nicht mehr Variablen wie Glg.
**Kinematisch unbestimmt**: zulässige Beweg. mögl.

# PdVL

- Stab entfernen und durch Kraft ersetzen (Kraftpfeile nach innen! -> Kraft grösser 0 Zugstab, Kraft kleiner 0 Druckstab)
- Bewegungszustand einführen, der mit der Konstruktion verträglich ist
- An jedem Punkt, wo eine Kraft angreift, die Leistung bestimmen, Summe muss 0 sein
- B Kraft auf ein Gelenk: nur Kraft auf einen Stab einzeichnen

# Dynamik

**Beschleunigung**: $a = \dot{v} = \ddot{r} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z$

**Bewegungsgleichung**: $m * \ddot{\vec{r}} = F(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t)$

**Impuls**: $\vec{p} = m * \vec{v}$, $\dot{\vec{P}} = \vec{R}$

**Energie**: $E_{kin} = \frac{1}{2} m * v^2$

$E_{pot} = m * g * h$

**Feder**: $F = -k * \Delta l$

**Reibung**: $|\boldsymbol{F_r}| = \mu_{0,1} |\boldsymbol{N}|$

**Rollreibung:** $\boldsymbol{M_f}$ entgegen $\boldsymbol{\omega}$ mit $\boldsymbol{M_f} = \mu_2 |\boldsymbol{N}|$, $N$ ist Normalkraft, greift mit gewissem Abstand $e$ vom Mittelpunkt an

**<u>Polarkoordinaten (Rotation mit $r,\varphi$)</u>**

**Radiale Kräfte**: $m * \ddot{\vec{r}}(t) = F_r + F_R^{(t)}$

$m$ Masse, $\ddot{\vec{r}}(t)$Radiale Beschl., $F_r$ Kraft, $F_R^{(t)}$ Trägheitskraft

$\boldsymbol{F_R^{(t)}}$ **(Zentrifugalkraft)** bei Kreisbewegungen: $= m * r * (\dot{\varphi})^2 = m * r * \omega^2$
**Tangentiale Kräfte**: $m * r * \ddot{\varphi} = F_\varphi + F_\varphi^{(t)}$

**Energie**: $E_{kin\,rot} = \frac{1}{2} I * \omega^2 = \frac{1}{2} * m * \dot{\varphi}^2$

**Drehimpuls**: $\vec{L} = I * \dot{\vec{\varphi}} = r * v_T * m$

$L_0 = I_0 \omega$

**Geschwindigkeit** $v = R_{adius} * \dot{\varphi}$

# Impuls & Drall

**Impulssatz/MMS**: $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}$ (Resultierende)
**Drallsatz:** $\dot{L}_c = I_c \dot{\omega} = I_c \ddot{\varphi} = M_c$ um Massenmittelpunkt $C$ mit Moment $M_C$

Einige Trägheitsmomente:
Massenpunkt, Ring: $I_0 = mr^2$
Stab (bzgl. Endpkt.): $I_0 = \frac{1}{3} ml^2$
Stab (bzgl. Mittenpkt.): $I_0 = \frac{1}{12} ml^2$
Kreisscheibe (bzgl. Mittelpkt.): $I_0 = \frac{1}{2} mR^2$
Kugel (voll): $I_C = \frac{2}{5} mr^2$
Kugel (leer): $I_C = \frac{2}{3} mr^2$

# Differentialgleichungen

| **Gleichung** | **Ansatz** |
|---|---|
| $\ddot{x} = 0$ | $x(t) = A * t + B$ |
| $\ddot{x} + \omega * x = 0$ | $x(t) = A * \cos(\sqrt{\omega} * t) + B * \sin(\sqrt{\omega} * t)$ |
| $\ddot{x} + \omega * x = k$ | $x(t) = A * \cos(\sqrt{\omega} * t) + B * \sin(\sqrt{\omega} * t) + \frac{k}{\omega}$ |
| $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$ | $x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$ |

**Achtung**: $m$ bei $m\ddot{x}(t)$ wegdividieren!

Linearisieren: $\sin\varphi = \varphi$ für kleine $\varphi$

**Transformation (Bsp.):**

$$q_1 = x_1 + x_2$$

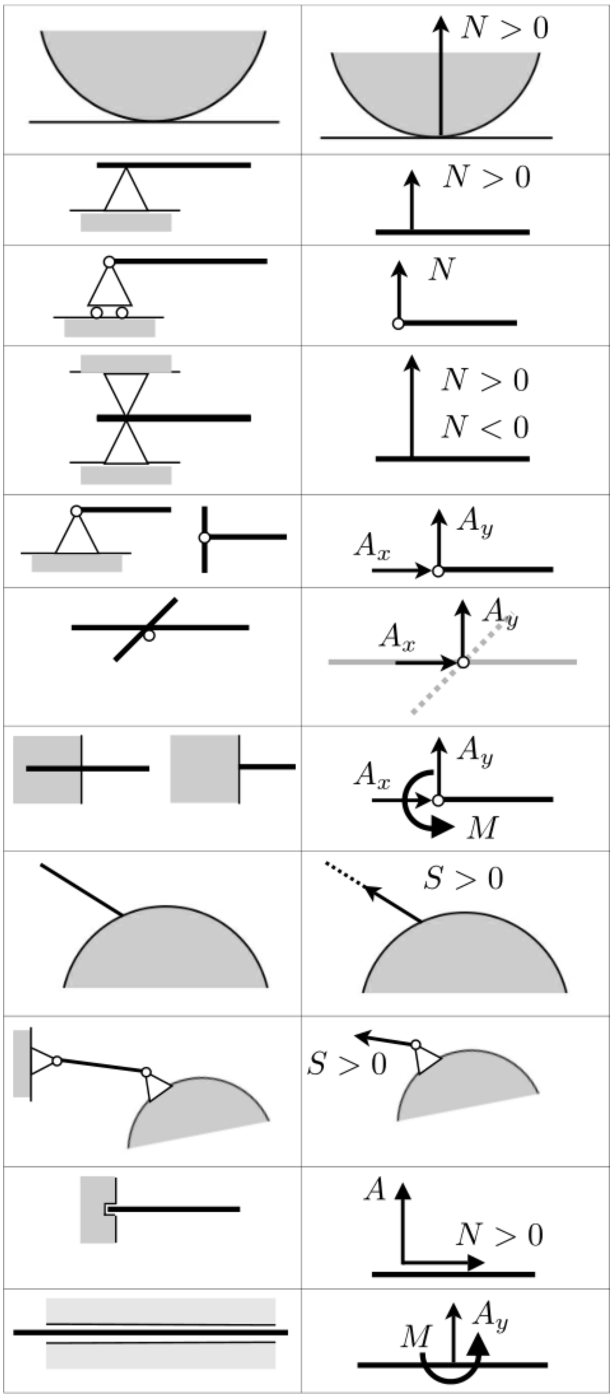
$$q_2 = x_2 - x_2$$

$$\text{und } x_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}, x_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

## SIN UND COS

| | 0 | 30 $\frac{\pi}{6}$ | 45 $\frac{\pi}{4}$ | 60 $\frac{\pi}{3}$ | 90 $\frac{\pi}{2}$ | 180 $\pi$ | 270 $\frac{3\pi}{2}$ | 360 $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | *undef* | 0 | *undef* | 0 |

## BINDUNGEN

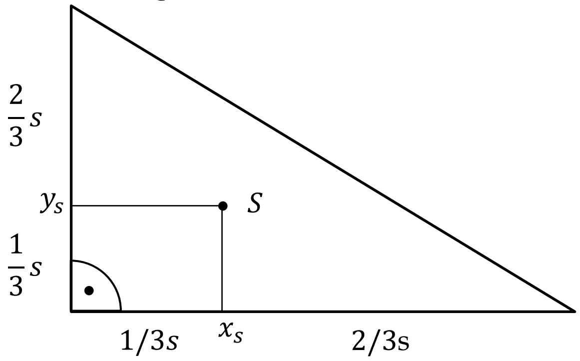



## SCHWERPUNKTE

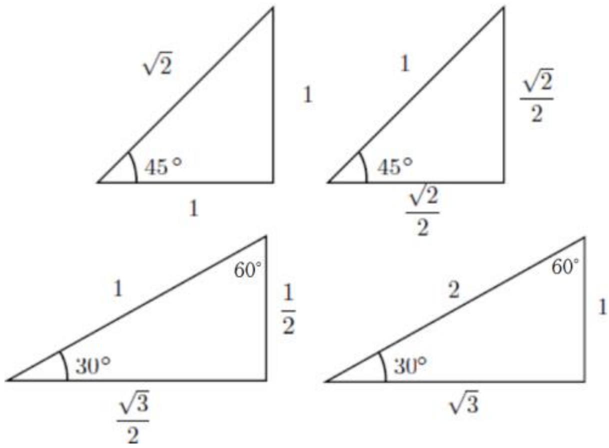
**Gleichseitiges Dreieck**: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

**Halbkreis**: $h = \frac{4}{3\pi r}$

**Rechtwinkliges Dreieck**




## DIVERSES




Winkelsumme n-Eck: $(n-2) * 180°$

Gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1$$